BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2011

УДК 517.927

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

З.С.АЛИЕВ, Э.А.АГАЕВ

Бакинский Государственный Университет

z_aliyev@mail.ru; elminagayev@yahoo.com

В работе рассматривается спектральная задача четвёртого порядка с регулярными и вполне регулярными краевыми условиями. Изучаются общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси и осцилляционные свойства собственных функций. Доказывается, что число нулей собственных функций, отвечающих положительным собственным значениям, ведёт себя обычным образом (ровно уменьшённому на 1 номеру собственного значения), однако число нулей собственных функций, отвечающих отрицательным собственным значениям, может быть произвольным.

Ключевые слова: собственное значение, собственная функция, осцилляционные свойства собственных функций, « μ -процесс».

Рассматривается обыкновенное уравнение Штурма-Лиувилля четвёртого порядка

$$L(y) \equiv (py'')'' - (qy')' + ry - \lambda \tau y = 0 \text{ в } (a,b), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$a_{11}Ty(a) + a_{12}(py'')(a) + a_{13}y'(a) + a_{14}y(a) = 0, \tag{2.a}$$

$$a_{21}Ty(a) + a_{22}(py'')(a) + a_{23}y'(a) + a_{24}y(a) = 0, \tag{2.b}$$

$$b_{11}Ty(b) + b_{12}(py'')(b) + b_{13}y'(b) + b_{14}y(b) = 0, \tag{2.c}$$

$$b_{21}Ty(b) + b_{22}(py'')(b) + b_{23}y'(b) + b_{24}y(b) = 0, \tag{2.d}$$

где $p(x) \in C^2[a,b],\ q(x) \in C^1[a,b],\ r(x), \tau(x) \in C[a,b],\ p(x) > 0, q(x) > 0, \tau(x) > 0$ на $[a,b]$, a_{ij}, b_{ij}, $i, j = 1,2$ - действительные постоянные, причём

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Следует отметить, что выполнение условия (3) необходимо и достаточно для самосопряженности граничных условий (2). Задача (1),(2) называется системой Штурма четвёртого порядка. Обозначим:

$$A_1(y) \equiv Ty(a) - A_0 y'(a) + A_1 y(a),$$

$$A_2(y) \equiv (py'')(a) + A_2 y'(a) + A_0 y(a),$$

$$A_3(y) \equiv Ty(a) + A_3(py'')(a) + A_4 y(a),$$

$$A_4(y) \equiv y'(a) + A_3 y(a),$$

$$A_5(y) \equiv (py'')(a) + A_5 y'(a),$$

$$B_1(y) \equiv Ty(b) - B_0 y'(b) + B_1 y(b),$$

$$B_2(y) \equiv (py'')(b) + B_2 y'(b) + B_0 y(b),$$

$$B_3(y) \equiv Ty(b) + B_3(py'')(b) + B_4 y(b),$$

$$B_4(y) \equiv y'(b) + B_3 y(b),$$

$$B_5(y) \equiv (py'')(b) + B_5 y'(b).$$

Как и в [1] канонические формы краевых условий (2) даётся следующим образом:

I) $A_1(y)=A_2(y)=B_1(y)=B_2(y)=0$; II) $A_3(y)=A_4(y)=B_1(y)=B_2(y)=0$;

III) $A_3(y)=A_4(y)=B_3(y)=B_4(y)=0$; IV) $A_5(y)=y(a)=B_1(y)=B_2(y)=0$;

V) $A_5(y)=y(a)=B_3(y)=B_4(y)=0$; VI) $A_5(y)=y(a)=B_5(y)=y(b)=0$;

VII) $y'(a)=y(a)=B_1(y)=B_2(y)=0$; VIII) $y'(a)=y(a)=B_3(y)=B_4(y)=0$;

IX) $y'(a)=y(a)=B_5(y)=y(b)=0$; X) $y'(a)=y(a)=y'(b)=y(b)=0$.

Система Штурма называется регулярной, если коэффициенты краевых условий в канонических формах удовлетворяют условиям:

$$A_0 \ge 0, B_0 \ge 0, B_2 \ge 0, B_3 \ge 0, A_2 \le 0, A_3 \le 0. \tag{4}$$

Регулярная система Штурма называется вполне регулярным, если выполняются также условия:

$$\left.\begin{aligned} &A_0^2 \le |A_1 A_2|,\ B_0^2 \le |B_1 B_2|,\ A_1 > 0,\ A_5 \le 0,\ B_5 \ge 0,\ B_1 < 0 \\ &A_4 > 0\ (\ge 0,\ \text{если}\, A_3 \ne 0),\ B_4 < 0 (\ge 0,\ \text{если}\, B_3 \ne 0). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что краевые условия вполне регулярной системы можно также задать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&A_6(y) = (py'')(a) - C_0Ty(a) - C_1y'(a) = 0, \\
&A_7(y) = y(a) + C_2Ty(a) - C_0y'(a) = 0, \\
&B_6(y) = (py'')(b) + D_0Ty(b) + D_1y'(b) = 0, \\
&B_7(y) = y(b) - D_2Ty(b) + D_0y'(b) = 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2 \geq 0$, и случаи $C_1 = \infty$ или $D_1 = \infty$ не исключаются.

Регулярные системы Штурма (без потенциала) в частных случаях рассматривались в работах [2-7]. В [2] с помощью преобразования типа Прюфера исследованы осцилляционные свойства собственных функций и их производных. В [3-7] исследованы вопросы о числе нулей для собственных функций, отвечающих как положительным, так и отрицательным собственным значениям некоторых регулярных систем Штурма.

Настоящая работа посвящена изучению общей характеристики расположения собственных значений на вещественной оси и осцилляционных свойств собственных функций регулярных систем Штурма в общем случае.

Нетрудно заметить, что задача (1),(2) является самосопряжённой, а потому все собственные значения этой задачи действительны; кроме того, регулярные системы Штурма являются регулярными (причём усиленно регулярными) по Биркгофу (см. напр., [8,9]), так что эти системы имеют дискретный спектр, более того существует счетное множество собственных значений, не имеющей конечной предельной точки, которые могут быть записаны в виде последовательности $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$; собственные значения, за исключением конечного числа (кратности которых ≤ 2), являются простыми. Далее, по формуле Дирихле [9, с.99] имеем

$$
\int_a^b yL(y)dx = \int_a^b (py''^2 + qy'^2 + ry^2 - \lambda\tau y^2)dx + (yTy - y'(py''))\Big|_a^b,
$$

из которого следует, что при $r(x) \equiv 0$ собственные значения вполне регулярной системы неотрицательны. Таким образом, доказана следующая

Лемма 1. Собственные значения регулярной системы Штурма вещественны, имеют конечную кратность (≤ 2) и образуют неограниченно неубывающую последовательность $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$. Собственные функции, соответствующие различным значениям, ортогональны в $L_2(\tau;[a,b])$. Собственные значения вполне регулярной системы неотрицательны при $r(x)\equiv 0$.

Лемма 2. Пусть λ является собственным значением регулярной системы Штурма такое, что выполняется условие $r(x)-\lambda\tau(x)<0, x\in(a,b)$. Если $y(x)$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ, то имеют место следующие утверждения:

1^0. нули функции $y(x)$ в (a,b) простые;

2^0. при краевых условиях (I-III) либо (XI) при $C_1\neq\infty$ и $C_1+C_2\neq 0$, либо при $C_1=\infty$ и $C_2\neq 0$ имеем $y(a)\neq 0$;

3^0. при краевых условиях (IV-VI) либо (XI) при $C_1\neq\infty$ и $C_0=C_2=0$ имеем $y'(a)\neq 0$;

4^0. при краевых условиях (VII-X) имеем $y''(a)\neq 0$;

5^0. при краевых условиях (I-VII, VII , VIII) либо (XI) при $D_1\neq\infty$ и $D_0+D_2\neq 0$, либо при $D_1=\infty$ и $D_2\neq 0$ имеем $y(a)\neq 0$;

6^0. при краевых условиях (VI, IX) либо (XI) при $D_1\neq\infty$ и $D_0=D_2=0$ имеем $y'(b)\neq 0$;

7^0. при краевых условиях (X) имеем $y''(b)\neq 0$.

Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 1 [1], с использованием леммы 2.1 [2].

Следствие 1. Собственные значения регулярной системы Штурма, удовлетворяющие условию $r(x)-\lambda\tau(x)<0,\ x\in(a,b)$, являются простыми, а все собственные значения вполне регулярной системы являются простыми при $r(x)\equiv 0$.

Если коэффициенты в уравнении (1) и в краевых условий (2) являются функциями параметра μ, тогда собственные значения и соответствующие собственные функции также будут функциями μ. Предположим, что $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$, $\mu_1,\mu_2\in R$. При этом собственные значения и соответствующие собственные функции будем обозначать через $\{\lambda_n(\mu)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n(x,\mu)\}_{n=1}^{\infty}$, соответственно. Далее предположим, что выполняется следующие условия:

1^0. функции $p''(x,\mu), q'(x,\mu), r(x,\mu), \tau(x,\mu)\in C([a,b]\times I)$;

2^0. существуют вещественные числа $p_0>0$, $q_0>0$ и $\tau_0>0$, такие, что $p(x,\mu)>p_0$, $q(x,\mu)>q_0$, $\tau(x)>\tau_0, x\in[a,b]\times I$;

3^0. в канонических формах (I-X), а также (XI), соответствующие коэффициенты являются ограниченными и непрерывными функциями параметра μ.

Лемма 3. Пусть выполняются условия 1^0-3^0. Тогда собственные значения $\{\lambda_n(\mu)\}_{n=1}^{\infty}$ вещественны, остаются конечными и непрерывны по μ. Если некоторые собственные значения $\lambda^{(1)}(\mu), \lambda^{(2)}(\mu),...$ имеют предел λ_0 при $\mu \to \mu_0$, то λ_0 является собственным значением задачи (1), (2) при $\mu = \mu_0$ и кратность этого собственного значения равна сумме кратностей собственных значений $\lambda^{(1)}(\mu), \lambda^{(2)}(\mu),...$.

Пусть $\varphi(x,\mu)$ нормированная собственная функция, соответствующая одному из собственных значений $\lambda^{(1)}(\mu), \lambda^{(2)}(\mu),...$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти нормированную собственную функцию $y_0(x)$, соответствующую собственному значению λ_0, и число $\delta(\varepsilon) > 0$ такие, что неравенство и

$$\left| y^{(k)}(x,\mu) - y_0^{(k)}(x) \right| < \varepsilon, \; k = \overline{0,4},$$

выполняется для всех $x \in [a,b]$ и для каждого фиксированного $\left| \mu - \mu_0 \right| < \delta(\varepsilon)$. Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 2 [1], с использованием лемм 1, 2.

Лемма 4. Предположим, что коэффициенты $p(x,\mu'), q(x,\mu''), r(x,\mu''')$, $\tau(x,\mu^{IV}), (x,\mu) \in [a,b] \times I$, в уравнении (1) являются аналитическими соответствующего параметра μ и удовлетворяют условиям 1^0-3^0. Пусть коэффициенты краевых условий фиксированы и функции p, q, r, τ являются монотонными при непрерывном изменении соответствующего параметра μ (при условии, что изменение происходит по одному параметру при фиксированных остальных). Тогда

i) если p (либо q, либо r) возрастает (убывает), то собственные значения не убывают (не возрастают);

ii) если τ возрастает (убывает), то абсолютные значения ненулевых собственных значений не возрастают (не убывают).

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [1], с использованием 1-3.

Применение метода непрерывности основано на использовании непрерывных преобразований различных систем Штурма. Будем использовать исключительно специфический случай таких преобразований: пусть

$\{L_1(y), A_i^{(1)}, B_i^{(1)}\}$, $\{L_2(y), A_i^{(2)}, B_i^{(2)}\}$ любые две системы Штурма, граничные условия которых, взятые в канонической форме, принадлежат классу (I-X). Каждая из данных систем может быть преобразована непрерывно в другой, с помощью класса систем Штурма $\{L_\mu(y), A_i(\mu), B_i(\mu)\}$, где $L_\mu(y) \equiv (p(x,\mu)y'')'' - (q(x,\mu)y')' + (r(x,\mu - \lambda\tau(x,\mu))$ и

$p(x,\mu) \equiv (1-\mu')p_1(x) + \mu' p_2(x)$, $q(x,\mu) = (1-\mu'')q_1(x) + \mu'' q_2(x)$,

$r(x,\mu) \equiv (1-\mu''')r_1(x) + \mu''' r_2(x)$, $\tau(x,\mu) \equiv (1-\mu^{IV})\tau_1(x) + \mu^{IV}\tau_2(x)$;

$A_i(\mu) \equiv \; \equiv A_i^{(1)}(1-\mu_i) + A_i^{(2)}\mu_i$, $B_i(\mu) \equiv B_i^{(1)}(1-\mu_i) + B_i^{(2)}\mu_i$. Как параметры $\mu', \mu'', \ldots, \mu_i$ возрастают независимо от 0 до 1 система $\{L_1(y), A_i^{(1)}, B_i^{(1)}\}$ преобразуется непрерывно в $\{L_2(y), A_i^{(2)}, B_i^{(2)}\}$ и наоборот. Мы назовём преобразование этого вида « μ-процесс»ом.

Через $\{h, H\}$ определим класс всех систем Штурма, в котором *a*) коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям: $0 \le h \le p, q, \tau \le H, |r| \le H$; в канонических формах (I-X) коэффициенты A_i, B_i не превышают H по абсолютной величине.

Имеет место следующая

Лемма 5. Собственные значения всех систем Штурма класса $\{h, H\}$ равномерно ограничены снизу числом $\Lambda \equiv \Lambda(h, H)$, зависящая только от h и H. Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2 из [1], с использованием лемм 3,4.

Следствие 2. $-\infty$ не может быть предельной точкой собственных значений регулярной системы; число отрицательных собственных значений всех таких систем конечно.

Лемма 6. Пусть $\{L_1(y), A_i^{(1)}, B_i^{(1)}\}$ и $\{L_2(y), A_i^{(2)}, B_i^{(2)}\}$ любые две регулярные системы Штурма, в которых канонические формы граничных условий имеют тот же самый тип (I-X). Если одна из данных систем преобразована в другой « μ-процесс»ом, то все собственные значения остаются конечными и не один из них не теряется или не получается из $\lambda = \pm\infty$.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 3 из [1], с использованием лемм 1-5 и следствия 1.

Изучение осцилляционных свойств регулярных систем Штурма основываются на следующей лемме.

Лемма 7. Пусть любая регулярная система Штурма преобразована в другую регулярную систему Штурма посредством « μ-процесс»а при условиях леммы 6. Тогда собственные функции, соответствующие собственным значениям, которые при всех значениях параметра $\mu \in (0,1)$, удовлетворяют условиям леммы 2, сохраняют их осцилляционные свойства. Другими словами, число нулей любой такой собственной функции в (a,b) остаётся тем же самым при всех $\mu \in (0,1)$.

Доказательство проводится по схеме доказательства леммы 3 из [1], с использованием лемм 1-3,6 и следствия 1.

Замечание 1. Определение «μ-процесс»а можно непосредственно перенести и на случай вполне регулярных систем Штурма. Результаты теоремы 3 и леммы 3 остаются справедливыми с некоторыми модификациями при «μ-процесс»е (см. замечание пункта 13 [1]).

Теперь займёмся изучением осцилляционных свойств собственных функций регулярных систем Штурма.

Рассмотрим вполне регулярную систему Штурма с оператором $L_1 y = (py'')'' - (qy')' - \lambda \tau\, y$. Нетрудно заметить, что эта система получается из вполне регулярной системы Штурма с оператором $L_2 y = (py'')'' - \lambda \tau\, y$ с применением «μ-процесс»а посредством деформации $q(x,\mu) = \mu'' q(x)$. Известно [1, теорема 4], что собственные значения вполне регулярной системы Штурма с оператором L_2 являются положительными и простыми, и образуют бесконечно возрастающую последовательность $0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n < \ldots$; собственная функция $v_n(x)$, соответствующая собственному значению ν_n, имеет в точности $n-1$ простых нулей в интервале (a,b). В силу замечания 1, эти свойства остаются неизменными при переходе от системы с оператором L_2 к системе с оператором L_1 посредством «μ-процесс»а. Таким образом, справедлива следующая осцилляционная

Теорема 1. Собственные значения вполне регулярных систем Штурма (при $r(x) \equiv 0$) являются положительными, простыми и образуют бесконечно возрастающую последовательность $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, кроме того собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет в точности $n-1$ простых нулей в (a,b).

Очевидно, что регулярная система Штурма с оператором L_1 может быть получена посредством «μ-процесс»а из некоторой вполне регулярной системы Штурма с оператором L_1. При переходе от первой системы ко второй конечное число из собственных значений могут проходить через $\lambda = 0$ и получать отрицательные значения (лемма 6). Эти собственные значения называются иррегулярными, а остальные собственные значения называются регулярными (которые никогда ни приближаются к нулю). Так как лемма 7 применяется к регулярным собственным значениям, осцилляционные свойства соответствующих «регулярных» собственных функций не меняются.

Обозначим: $p_0 = \min\limits_{x\in[a,b]} p(x),\ q_0 = \min\limits_{x\in[a,b]} q(x),\ \tau_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} \tau(x)$. Пусть (R_0) регулярная система Штурма которая получена из первой системы заменой $p(x)$ на p_0, $q(x)$ на q_0 и $\tau(x)$ на τ_1, а (Σ_0) вполне регулярная система, которая получена из второй системы той же заменой. При переходе от системы (Σ_0) к системе (R_0) посредством «μ-процесс»а все собственные значения $\lambda_n^{(0)}(\mu)$ регулярны в начальной стадии, следовательно, собственная функция $y_3^{(0)}(x,\mu)$ имеет в точности два простых нуля в интервале (a,b) в начальной стадии. Если в определённой стадии «μ-процесс»а 0 является собственным значением, то соответствующая собственная функция (или соответствующие собственные функции в случае, когда 0 является кратным собственным значением) является полиномом степени ≤ 1, так как эта собственная функция (или собственные функции) является решением уравнения $p_0 y^{IV} - q_0 y'' = 0$. А это показывает, что $\lambda_3^{(0)}(\mu)$ не может приближаться к нулю, так как $y_3^{(0)}(x,\mu)$, имея 2 простых нуля в (a,b), не может приближаться к полиномам степени ≤ 1.

Теперь переходим от системы (R_0) к первой системе посредством «μ-процесс»а. Так как коэффициенты $p(x,\mu) \equiv (1-\mu')p_0 + \mu' p(x)$, $q(x,\mu) \equiv (1-\mu'')q_0 + \mu'' q(x)$ возрастают, а коэффициент $\tau(x,\mu) \equiv (1-\mu^{IV})\tau_1 + \mu^{IV}\tau(x)$ убывает, то в силу леммы 4 положительные собственные значения не убывают. Следовательно, $\lambda_3(\mu),\ldots$ остаются положительными, конечными и простыми, а соответствующие им собственные функции, в силу следствия 1 и леммы 6, не меняют осцилляционные свойства. Таким образом, доказана следующая осцилляционная

Теорема 2. Пусть $r(x) \equiv 0$. Тогда собственные значения регулярных систем Штурма, за исключением, может быть, первых двух собственных значений, являются положительными и простыми $\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \ldots < \lambda_n < \ldots$; собственная функция $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n при $n \geq 3$, имеет в точности $n-1$ простых нулей в интервале (a,b).

Замечание 2. Пользуясь методом работы [5], можно доказать, что количество нулей собственных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ могут быть произвольными.

А теперь рассмотрим регулярную систему Штурма при $\tau(x) \not\equiv 0$. Пусть (R) заданная система. Пологая $r_0 = \min\limits_{x\in[a,b]} r(x),\ r_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} r(x)$ и $\tau_0 = \min\limits_{x\in[a,b]} \tau(x)$, определим регулярную систему (R_0) из (R) заменой $r(x)$ на r_0 и $\tau(x)$ на τ_1. При замене переменной $\lambda' = \lambda\tau_1 - r_0$ система (R_0) переходит к эквивалентной системе (R_0') того же типа, к которому применима теорема 2. Пусть $\lambda_1' \le \lambda_2'' < \lambda_3' < \lambda_4' < \ldots$ собственные значения системы (R_0') и $\lambda_n^{(0)} = \dfrac{\lambda_n' + r_0}{\tau_1}$, $n \in N$, соответствующие собственные значения системы (R_0). При этом собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_3^{(0)}, \lambda_4^{(0)}, \ldots$, обладают осцилляционными свойствами, приведёнными в теореме 2.

Теперь переходим от системы (R_0) к системе (R) «μ-процесс»ом при помощи деформаций

$$r(x,\mu) \equiv (1-\mu''')r_0 + \mu''' r(x),\ \tau(x,\mu) \equiv (1-\mu^{IV})\tau_1 + \mu^{IV}\tau(x).$$

Так как $r(x,\mu)$ возрастает, а $\tau(x,\mu)$ убывает, то, в силу леммы 4, положительные собственные значения не убывают. Не трудно проверить, что условия леммы 2 ($r(x,\mu)$-$\lambda\tau(x,\mu) < 0$) выполняются для собственных значений $\lambda_m(\mu),\ \lambda_{m+1}(\mu), \ldots$, где $m = \max\{2, m_0\}$, а m_0 определяется из следующих соотношений $\lambda_{m_0}' = \dfrac{r_1\tau_1 + r_0\tau_0}{\tau_0} \ge \lambda_{m_0-1}'$, $\lambda_{m_0}^{(0)} > 0$.

Таким образом, доказана следующая осцилляционная

Теорема 3. Собственные значения регулярной системы Штурма за исключением, может быть, первых m собственных значений, где m определено выше, являются положительными и простыми $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{m-1} < \lambda_m < \ldots$; собственная $y_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n при $n \ge m$, имеет $n-1$ простых нулей в интервале (a,b).

ЛИТЕРАТУРА

1. Janczewsky S.A. Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order // Annals of Mathematics, 1928, v.29, p.521-542.
2. Banks D.O., Kurowski G.J. A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Dif. Equat., 1977, v.24,p.57-74.

3. Kerimov N.B., Aliyev Z.S. On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator // Trans. NAS Azerb., ser. of phys.-tech. math. science, 2005, v.25, №4, p.63-76.
4. Бен Амара Ж., Владимиров А.А. Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фундаментальная и прикладная математика, 2006, т.12, №4, с.41-52.
5. Ben Amara J. Sturm theory for the equation of vibrating beam // J.Mat.Anal. Appl., 2009, v.349, p.1-9.
6. Ben Amara J. Oscillation properties for the equation of vibrating beam with irregular boundary conditions // J.Mat.Anal.Appl., 2009, v.360, p.7-13.
7. Алиев З.С., Исмаилов Ф.Р. Об одной регулярной краевой задаче четвёртого порядка // Тезисы Международной конференции, посвящённой 90-летию БГУ, Баку, 2009, с.16-17.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, 576 с.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB MƏXSUSİ QİYMƏT MƏSƏLƏLƏRİ ÜÇÜN OSSİLLYASİYA TEOREMLƏRİ

Z.S.ƏLİYEV, E.A.AĞAYEV

XÜLASƏ

İşdə requlyar və tamam requlyar sərhəd şərtli dördüncü tərtib məxsusi qiymət məsələlərinə baxılır. Bu məsələlərin məxsusi ədədlərinin həqiqi oxda yerləşmə xarakteri tədqiq olunur və məxsusi funksiyalarının ossillyasiya xassələri öyrənilir. Müsbət məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi funksiyaların sıfırlarının sayının adi qaydada dəyişdiyi (daha doğrusu onların sayının məxsusi ədədin nömrəsindən bir vahid kiçik olduğu), lakin mənfi məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi funksiyaların sıfırlarının sayı isə ixtiyari sayda olduğu göstərilir.

Açar sözlər: məxsusi ədəd, məxsusi funksiya, məxsusi funksiyanın ossillyasiya xassələri, « μ -prosesi».

OSCILLATION THEOREMS FOR THE EIGENVALUE PROBLEMS OF THE FOURTH ORDER

Z.S.ALIYEV, E.A.AGHAYEV

SUMMARY

In this paper, we consider the fourth order eigenvalue problems with the regular and completely regular boundary conditions. We characterize the location of the eigenvalues in the real axis and investigate the oscillation properties of the eigenfunctions of this problem. We show that the number of zeros of the eigenfunctions corresponding to the positive eigenvalues behaves in a usual way (it is equal to the serial number of an increased by 1), however, the number of zeros of the eigenfunctions corresponding to the negative eigenvalues can be arbitrary.

Key words: eigenvalue, eigenfunction, oscillation properties of eigenfunctions, “ μ - process”.

Поступила в редакцию: 12.03.2011 г.
Принято к печати: 17.06.2011 г.